

Trojúhelník

Je jednoznačně určen třemi body, které neleží v jedné přímce.

Strana **a** leží proti vrcholu **A** atd.

Rozdělení trojúhelníků:

Podle délek stran

- rovnostranné – délky všech stran jsou shodné
- rovnoramenné – dvě strany (ramena) mají stejnou délku, třetí strana se nazývá základna
- různostranné (obecné) – žádné dvě strany nejsou stejně dlouhé

Podle velikostí vnitřních úhlů

- ostroúhlé – všechny vnitřní úhly jsou ostré
- pravoúhlé – mají jeden pravý úhel
- tupoúhlé – jeden úhel je tupý

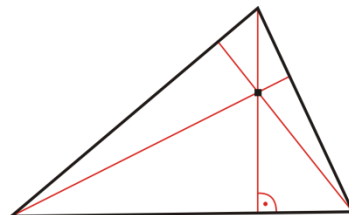
Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je 180° . V trojúhelníku leží proti větší straně větší vnitřní úhel, proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strana.

Trojúhelníková nerovnost:

$$a + b > c \quad b + c > a \quad a + c > b$$

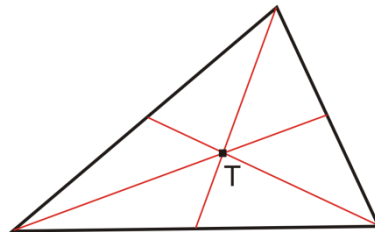
Výška

Je kolmice na stranu trojúhelníka procházející protějším vrcholem. Všechny tři přímky se protínají v jednom bodě, který se nazývá ortocentrum.



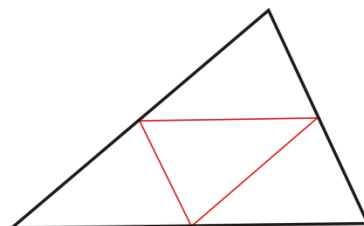
Těžnice:

Úsečka spojující vrchol a střed protější strany trojúhelníku. Těžnice se protínají v těžišti trojúhelníka. Vzdálenost těžiště od vrcholu = $2/3$ délky těžnice.



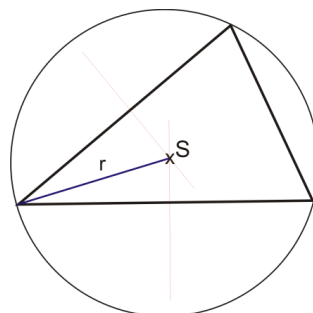
Střední příčka:

Úsečka, která spojuje středy dvou stran. Je rovnoběžná se stranou, kterou nespojuje a má poloviční délku.



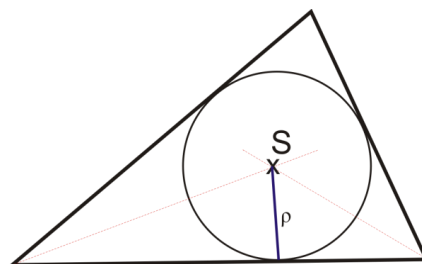
Kružnice opsaná:

je kružnice, která prochází všemi vrcholy a její střed leží v bodě, kde se protínají osy stran trojúhelníku.



Kružnice vepsaná:

je kružnice, jejíž tečny jsou strany trojúhelníku, a její střed leží v bodě, kde se protínají osy vnitřních úhlů trojúhelníku.



Shodnost trojúhelníků:

Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud je lze přemístit tak, že se kryjí.

Podobnost trojúhelníků:

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC , jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro jejich strany platí:

$$c' = k \times c, a' = k \times a, b' = k \times b$$

Číslo k se nazývá poměr podobnosti trojúhelníků. Je-li $k > 1$, nazývá se podobnost zvětšení, je-li $k < 1$, jde o zmenšení a pokud je $k = 1$, jsou oba trojúhelníky shodné.

Věty o podobnosti trojúhelníků:

Věta **uu**: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.

Věta **sus**: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu a v poměru délek stran ležících na jeho ramenech.

Věta **sss**: Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže poměry délek sobě příslušných stran se sobě rovnají.

Pravoúhlý trojúhelník

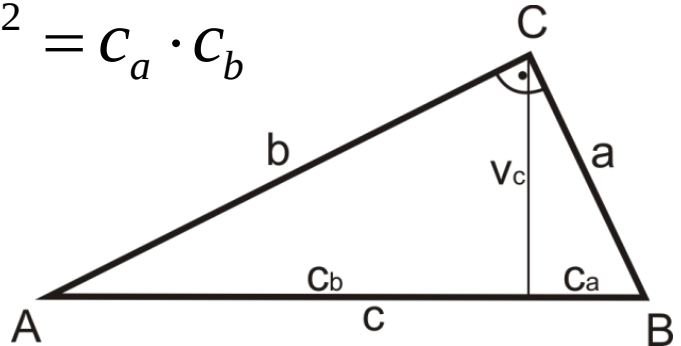
Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$

Eukleidova věta o výšce $v^2 = c_a \cdot c_b$

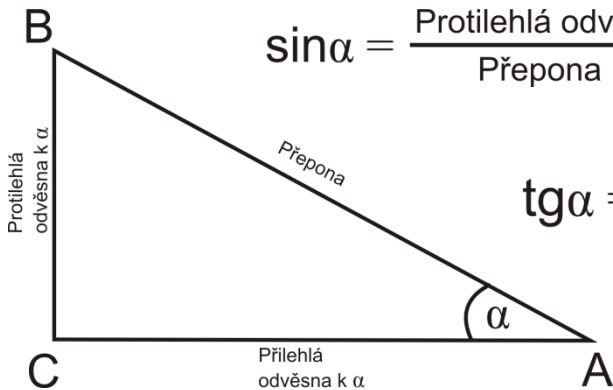
Eukleidova věta o odvěsně

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$



Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku



$$\sin \alpha = \frac{\text{Protilehlá odvěsna}}{\text{Přepona}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Přilehlá odvěsna}}{\text{Přepona}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Protilehlá odvěsna}}{\text{Přilehlá odvěsna}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Přilehlá odvěsna}}{\text{Protilehlá odvěsna}}$$

Goniometrické funkce v obecném trojúhelníku

Sinova věta:
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinova věta:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Obvod a obsah trojúhelníku

Obvod: $O = a + b + c$

Obsah: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta$$

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

- Vypočítejte obvod, obsah, velikosti zbývajících stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku je-li dáno:
 - $b = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 - $a = 35 \text{ cm}$, $b = 42 \text{ cm}$, $\alpha = 37^\circ$
 - $V_a = 32 \text{ cm}$, $\gamma = 36^\circ$, $\beta = 69^\circ$
 - $V_a = 2,5 \text{ cm}$, $a = 7 \text{ cm}$, $\gamma = 50^\circ$
- Úseky přepony pravoúhlého trojúhelníku mají délky 3 a 7 cm . Určete obsah trojúhelníku a délky jeho odvěsen.
- Eva měří 160 cm a pod sluncem vrhá stín 80 cm. Nedaleký smrk vrhá ve stejnou denní dobu stín 7 m. Jak vysoký je smrk?
- Jirka vidí vrchol rozhledny pod úhlem 45° , popojde o 100 m blíž a nyní vidí vrchol rozhledny pod úhlem 70° . Jak vysoká je rozhledna?

Výsledky:

1. a) $\beta = 110^\circ$, $c = 4,26 \text{ cm}$, $a = 5,47 \text{ cm}$, $O = 17,73 \text{ cm}$, $S = 10,95 \text{ cm}^2$ **b)** $\beta = 46^\circ 14'$, $\gamma = 96^\circ 46'$, $c = 57,75 \text{ cm}$, $O = 134,75 \text{ cm}$, $S = 729,96 \text{ cm}^2$ **c)** $\alpha = 75^\circ$, $a = 56,33 \text{ cm}$, $b = 54,44 \text{ cm}$, $c = 34,28 \text{ cm}$, $O = 145,05 \text{ cm}$, $S = 901,28 \text{ cm}^2$ **d)** $\alpha = 77^\circ 09'$, $\beta = 53^\circ 51'$, $b = 3,26 \text{ cm}$, $c = 5,5 \text{ cm}$, $O = 15,76 \text{ cm}$, $S = 8,75 \text{ cm}^2$; **2.** $S = 22,9 \text{ cm}^2$, odvěsny 4,58 cm a 8,37 cm; **3.** 14 m; **4.** 157,23 m